Universidad Nacional de Santiago del Estero.

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología.

Departamento Académico de Física y Química.

Laboratorio de Física.

INTRODUCCION A LAS MEDICIONES DE LABORATORIO

AÑO 2016

Prologo:

En el presente trabajo se recopilan notas y apuntes con conceptos teóricos fundamentales para el trabajo de mediciones en prácticos de laboratorio de Física. El mismo fue elaborado sobre la base de varios apuntes introductorios de laboratorio elaborados por Gómez P. Estela, Palmas Luís y Lencina Néstor. La presente actualización, revisión y nuevo formato corresponde a Juárez Carlos R.

INTRODUCCION A LAS MEDICIONES DE LABORATORIO.

Introducción:

La Física es una *ciencia fáctica*, o sea que se atiene a los hechos. Busca validar las teorías y leyes que describen los fenómenos físicos. Las que son válidas después de pasar la prueba de la experimentación. Es en estas tareas experimentales en donde surge la necesidad de medir. Sus resultados pueden ser cualitativos pero cuando se quiere cuantificar se necesita medir.

¿Medir qué? Medir *magnitudes físicas* tales como: longitud, masa, tiempo, velocidad, aceleración, temperatura, frecuencia, potencia eléctrica, etc.

El objetivo principal de la ciencia es desarrollar teorías basadas en leyes fundamentales que permitan predecir el resultado de algunos experimentos. Estas leyes se expresan en lenguaje matemático. Este lenguaje matemático establece un puente entre la teoría y el experimento.

Algunas teorías pueden surgir y desarrollarse no directamente de la experiencia sino de especulaciones para luego ser verificadas experimentalmente.

Magnitudes y Cantidades Físicas.

La magnitud física es un concepto que representa una propiedad de algún objeto real o posible. Por ejemplo, la posición de una partícula y el tiempo que tarda ella en recorrer una distancia son magnitudes físicas. En cambio la posición y el tiempo en sí mismos, sin referencia a objetos físicos, no son magnitudes sino propiedades del espacio tiempo. Toda magnitud física se define explícita o implícitamente en alguna teoría o familia de teorías. Cualquier número empleado para describir cuantitativamente un fenómeno físico se denomina cantidad física. En Física trabajamos con cantidades físicas a las que definimos describiendo los procedimientos que deben realizarse para calcularlas. Esto es lo que llamamos definición operacional. Por ejemplo:

$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, la velocidad media se obtiene como el cociente entre el desplazamiento ocurrido y el tiempo empleado en ese desplazamiento.

$\rho = \frac{m}{V}$, la densidad se obtiene como el cociente entre la masa de un cuerpo y su volumen.

¿Qué es medir?

Medir una cantidad es compararla con otra cantidad de la misma magnitud llamada unidad. Esta es convenientemente elegida por el operador.

En el proceso de medición interactúan tres sistemas: Sistema Objeto, Sistema de Medición, Sistema de unidades.

- **Sistema Objeto.** Lo que se quiere medir.
- **Sistema de Medición.** El instrumental y método de medición. Incluye también al operador quien es responsable de decidir si se cumplen los requisitos para hacer la medición y de comunicar el resultado.
- **Sistema de Unidades.** Se refiere a las unidades elegidas para comparar con el Sistema Objeto.

Antes de medir, se selecciona el instrumental y el método según la calidad de la medición que se pretenda. Este proceso previo se llama *Diseño de la Experiencia*. El instrumental debe ser el que se considere adecuado según el *orden de magnitud* que se desee medir.

Orden de Magnitud.

Se llama *orden de magnitud* a la potencia de diez más próxima al valor de la cantidad a la cual se hace referencia. Se utiliza este concepto para hacer estimaciones previas a la medición, por ejemplo, para seleccionar el instrumental y las cantidades a utilizar. Se puede estimar el orden de magnitud del volumen de dos tanques los cuales son aproximadamente: V_1= 800 litros y V_2 = 4000 litros. Ambos tanques, aun con volúmenes diferentes tienen el mismo orden de magnitud, que es de 10^3 litros, dado que V_1 está más próximo a 10^3 que a 10^2, y V_2 más próximo a 10^3 que a 10^4. Si otro tanque tiene un volumen que es mayor o igual a 5000 litros pero menor que 15000 litros decimos que su volumen tiene un orden de magnitud de 10^4 litros.
Si el volumen es mayor o igual que 500 litros se dice que su orden de magnitud es de 10^3.

Debemos expresar la potencia con la unidad correspondiente.

Es frecuente utilizar este concepto para seleccionar, en base a estimaciones, el instrumental y las unidades a utilizar.

Ejercicios:

Estime el orden de magnitud en los siguientes casos:

- Número de pasos para recorrer una cuadra.
- Distancia UNSE – Plaza Libertad.
- Distancia Tierra – Luna.
- Espesor de una hoja de cuaderno.
- Diámetro de la Tierra.
- Longitud de onda de la radiación correspondiente al espectro visible.
- Masa de un hombre común.
- Masa del electrón.

- Masa de la Tierra.
- Masa de un insecto.
- Masa de un automóvil.
- Tiempo de vida de una persona.
- Intervalo entre latidos del corazón.
- Período de rotación de la Tierra.
- Número de gotas en un balde de agua.
- Período de revolución de las paletas de un ventilador.

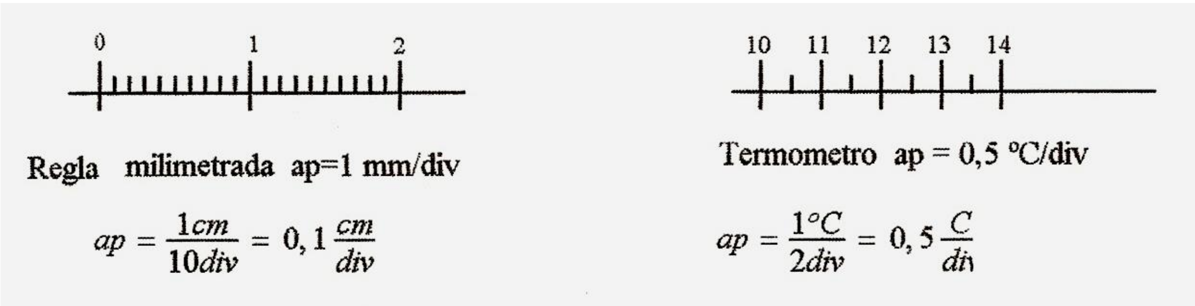
Características de un instrumento de medición.

Las características de un instrumento de medición son: Apreciación, Sensibilidad, Alcance y Exactitud.

Apreciación de un instrumento.

Es la cantidad correspondiente a la menor división de la escala de un instrumento.

Ejemplo (a escala ampliada):



Sensibilidad de un Instrumento.

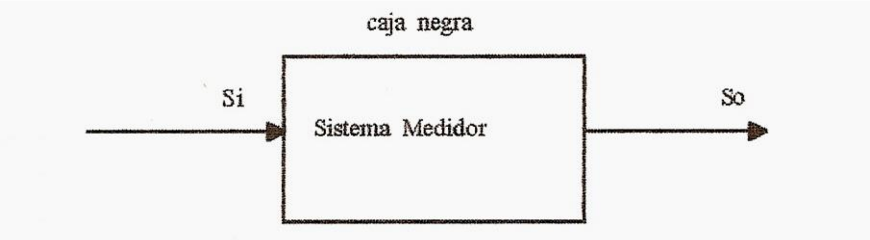
Al interactuar los tres sistemas en el proceso de medición se puede hacer una simplificación considerando al sistema medidor como una *caja negra* (quiere decir que no se considera el principio de funcionamiento del instrumental), donde solo se conoce la señal de entrada S_i, que es la cantidad que se quiere medir, y la señal de salida S_o, que es la cantidad producida por el sistema medidor como una respuesta a S_i.

A una variación de la cantidad de entrada le corresponde una variación de la cantidad de salida.

A partir de allí, se dice que la sensibilidad de un instrumento es mayor si la variación de la señal de salida es mayor para una misma variación en la señal de entrada.

De este modo se define la sensibilidad de un instrumento como:

$$s = \frac{\Delta S_o}{\Delta S_i}.$$



Puede ocurrir que la señal de salida S_o no sea una magnitud del mismo tipo de la señal S_i. Por ejemplo, en un dinamómetro S_i es una fuerza y S_o es una longitud. El dinamómetro fue previamente calibrado para que pueda leer fuerzas. El proceso de calibración permitirá medir directamente, en una escala apropiada la cantidad física, debido a que entre S_i y S_o existe una función del tipo $S_o = f(S_i)$.

La inversa de la sensibilidad es la apreciación, si es que se toma a ΔS_o como el valor mínimo que puede detectar el instrumento.

Alcance y Exactitud de un instrumento.

El alcance es la mayor lectura que se puede realizar de una sola vez con un instrumento. Realizar lecturas de mayor valor que el alcance de un instrumento puede ocasionar daños en el mismo, inutilizándolos para posteriores mediciones.

El alcance es una característica a considerar cuando se hace el diseño de una experiencia.

La exactitud de un instrumento es un dato que generalmente lo da el fabricante y está relacionado con la calibración. Es un dato que tiene fuerte incidencia en el precio del instrumento. Representa la fidelidad con que la señal de salida mide la señal de entrada.

En los instrumentos eléctricos se expresa en términos de *clase*, que es un número que indica el error de exactitud a plena escala. No se debe confundir exactitud con sensibilidad ya que son propiedades diferentes de un instrumento.

¿Cómo se comunica el resultado de una medición?

Como resultado de una medición no se obtiene directamente un número sino un intervalo.

El resultado de una medición se expresa dando el valor medido, con las cifras significativas correspondientes. **Las cifras significativas son los dígitos que provienen de una medición.** La última cifra significativa que se consigna está afectada por una incerteza experimental.

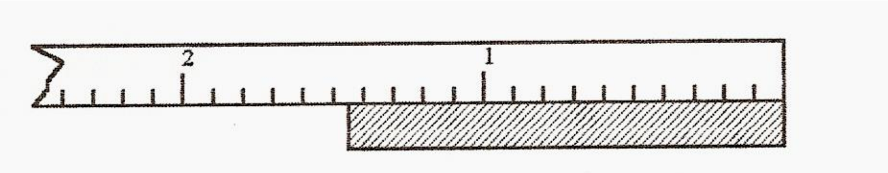
En la situación de la figura (en escala ampliada) se mide la longitud de una varilla con una regla milimetrada. La menor división del instrumento corresponde a los mm. Un extremo de la regla corresponde a 0 y el otro cae entre 14 mm y 15 mm. El operador está seguro que el valor buscado está comprendido en este intervalo de 1 mm y escribe el resultado como:

$$14 \text{ mm} \leq l \leq 15 \text{ mm}.$$

En general el resultado de una medición se expresa como:

$L = L_m \pm \Delta L$,

en donde L_m = longitud medida,
ΔL = error absoluto o incerteza.



Por el momento, hemos tomado como incerteza, a la apreciación de la regla.

En este caso, donde se hizo una ampliación del objeto y la regla podemos escribir una cifra no leída sino estimada:

$L = (14{,}5 \pm 0{,}5)$ mm.

No tiene sentido escribir el resultado de una medición con más cifras que la última estimada, dada por la incerteza, ni una incerteza con más de una cifra significativa.

Resumiendo, las cifras significativas son las cifras leídas más la primera incierta estimada. Observar que acotar con 1 mm o 0,5 mm dependerá del observador.

Cuando se opera matemáticamente con cifras significativas se debe cuidar que en el resultado no figuren cifras sobre las que no se tiene información. Cuando se hacen **cambios de unidades** se debe cuidar de no **alterar el número de cifras significativas**. Por ejemplo: si con una balanza se mide una masa de 5,43 gramos, y luego es necesario expresar esta cantidad en miligramos, esto no se puede escribir como 5430 miligramos, ya que al medir con la balanza no se midió (no se obtuvo información) en el orden de los miligramos.

Otro caso puede ocurrir cuando se hace una lectura en el orden de las centésimas de milímetro con un micrómetro y luego es necesario expresar esta cantidad en metros. En esta situación se debe tener cuidado ya que no se deben confundir cifras significativas con cifras decimales.

Por ejemplo: 0,25 mm y 0,00025 m son cantidades equivalentes, tienen la misma cantidad de cifras significativas (dos cifras significativas) pero distinta cantidad de decimales (la primera tiene dos decimales y la segunda cinco decimales). Tener en cuenta que los ceros a la izquierda no se cuentan como cifras significativas.

Esta situación se salva haciendo uso de la notación científica, la cual se expresa con un dígito entre 1 y 9 y la potencia de 10 correspondiente. De este modo se expresaría:

$5{,}43 \text{ g} = 5{,}43\ 10^{3} \text{ mg} \qquad 0{,}25 \text{ mm} = 2{,}5\ 10^{-4} \text{ m}$

Ejercicios:
¿Cuáles de los siguientes resultados están correctamente expresados? Escriba correctamente aquellos que no lo estén. Suponga que las incertezas son correctas.
(23,45 $\pm$ 0,4) m ; (23 $\pm$ 0,4) ltr ; (2 $\pm$ 0,003) Km ; (8,35 $\pm$ 0,01) g ; (18,353 $\pm$ 1) m^3

Error Absoluto y Error Relativo.

Cuando se tiene una serie de mediciones de una misma magnitud física, siempre en las mismas condiciones, se considera al promedio como su valor más probable.

Si se llama X_m a un valor medido de una magnitud física y X al valor más probable o mejor valor, se define al error absoluto como: $\Delta X = X_m - X$. Este resultado tiene las dimensiones y las unidades de la magnitud medida.

Cuando solo se tiene una medición se considera al valor medido como el más probable y se toma como error absoluto al error de apreciación del instrumento.

El cociente entre el error absoluto y el valor más probable se denomina error relativo:

$$\varepsilon = \frac{\Delta X}{X},$$

y no tiene dimensiones. Cuando el mismo está multiplicado por 100 tenemos el error relativo porcentual.

Cuando se escribe el resultado de una medición, esta puede acotarse con el error absoluto o con el error relativo. Esto se escribe:

$$X = X_m \pm \Delta X \qquad \text{ó} \qquad X = X_m \pm \varepsilon\%$$

La **calidad de una medición** está más representada por el **error relativo** o por el **error relativo porcentual** que por el error absoluto.

Ejemplo:

¿Cuál es la medición de mejor calidad?

a) Distancia Tierra – Luna D = (3848,2 $\pm$ 0,1) 10^5 m
b) Diámetro de una bolilla d = (2,15 $\pm$ 0,05) mm

Haciendo cálculos encontraremos que $\varepsilon_d >> \varepsilon_D$ a pesar de ser $\Delta D >> \Delta d$. En consecuencia, es mejor la medición en el caso a).

Ejercicios.

Se mide con una regla de Ap = 1 mm una pieza longitudinal resultando:

X = (435 $\pm$ 1) mm

a) ¿Cuál es el error relativo cometido en esta medición?
b) Si después, con la misma regla se mide otra longitud obteniéndose
   Y = (132 $\pm$ 1) mm
   ¿Cuál es el error relativo?
c) Compare ambos errores relativos. ¿Qué puede concluir?

Errores Mínimos.

La cantidad de cifras con que se comunica el resultado de una medición tiene un límite que es dado por su incerteza ya que en el resultado de una medición, los sistemas que interactúan, el **sistema objeto**, el **sistema medidor** y el **sistema unidad** introducen sus propias limitaciones.

Por otra parte, los sistemas al interactuar se pueden modificar, y si las interacciones son importantes pueden llegar a alterar el resultado de una medición, en varios órdenes de magnitud.

Por ejemplo: al medir una corriente eléctrica por una resistencia se introduce un instrumento llamado amperímetro con una resistencia interna que modifica el estado inicial del circuito. Lo que se mide entonces es una corriente diferente ya que se modificó la resistencia del circuito al agregarse la resistencia interna del instrumento.

Estos errores pueden minimizarse, pero no anularse con instrumentos o métodos adecuados a cada caso. Por lo expuesto se puede decir que *no se puede medir sin perturbar.*

Lo anterior se puede resumir expresando el error mínimo como la suma de los errores o incertezas que introducen cada uno de los sistemas más el error de interacción entre todos los sistemas. (Para más detalles ver Errores Experimentales – Cudmani - UNT)

Error mínimo = Error de definición (sistema objeto) + Error de apreciación + Error de exactitud (sistema medidor) + Error de interacción (entre todos los sistemas).

El error de definición tiene que ver con la definición de la cantidad a medir. Si se trata de la longitud de una hoja de papel cortada con guillotina y la longitud de una hoja de papel del mismo tamaño pero cortada a mano, la definición de sus bordes será diferente ya que el error de definición para la hoja con borde más irregular será mayor.

El error de apreciación tiene que ver con el instrumento y con el observador.

El error de exactitud depende de la "calidad" del instrumento, y la que está relacionada con la calibración del mismo. Es el que determina el precio del instrumento.

Las unidades también tienen límites. Por resultar ellas mismas de un proceso de medición con su propio error, el que a su vez, influye en la calibración del instrumento que a su vez determinará la exactitud de la medición.

Entonces **hay una imposibilidad, tanto teórica como práctica, de conocer el verdadero valor de la magnitud medida. Solo se puede llegar a conocer el valor más probable de la misma con su cota de error correspondiente.**

Al final, como resultado de la medición, se tiene un intervalo dentro del cual se encuentra el valor verdadero.

Ejercicios.

1. ¿En cuál de los siguientes casos la influencia de los errores mínimos debe ser considerada por ser del mismo orden que el error de apreciación del instrumento?
   a.- Se mide el intervalo entre latidos del corazón con un cronómetro de ap = 0,2 s.
   b.- Un estudiante mide la temperatura de una solución contenida en un tanque con un termómetro de ap = 0,5 °C. Otro estudiante mide la temperatura de la misma solución pero ahora contenida en un tubo de ensayo con el mismo termómetro.
   c.- La corriente eléctrica que circula por un circuito es, según los cálculos, del orden de 1 Ampere y se la mide conectando en serie un instrumento (amperímetro) cuya resistencia interna hace variar a la corriente en el orden de las milésimas de ampere. La apreciación del instrumento es 0,1 A.

2. Si necesita medir con una precisión del 1%
   a) La longitud del puente carretero.
   b) El espesor de una hoja de papel.

   ¿Qué métodos de medición adoptaría? ¿Qué características deberán tener los instrumentos utilizados?

OPERACIONES CON DIFERENTE CANTIDAD DE CIFRAS SIGNIFICATIVAS.

1) Adición y Sustracción.

Suponga que se desean sumar las siguientes cantidades:

2807,5
0,0648
83,645
525,35

Para que el resultado de la adición solo presente números significativos, deberá observar primero, cuál (o cuáles) cantidad (es) tiene (n) el menor número de cifras decimales. En este ejemplo tal valor es 2807,5, que tiene solo una cifra decimal. Dicha cantidad se mantendrá tal como está. Las demás deberán modificarse de modo que queden con el mismo número de cifras decimales eliminándose tantos dígitos como sea necesario.

Así, en la expresión 0,0648 debemos omitir los números 6, 4 y 8. Al eliminar los dígitos de una cantidad, el último número conservado deberá aumentarse en una unidad si el número eliminado contiguo fuese superior a 5 (regla del redondeo). Entonces la cantidad mencionada debe escribirse como 0,1.

En la expresión 83,645 hay que eliminar los números 4 y 5. Cuando el primer número eliminado sea inferior a 5, el último número conservado permanecerá invariable, de este modo, la cantidad 83,645 queda reducida a 83,6.

Por último, en la expresión 525,35 debemos eliminar el número 5. Cuando el primer número eliminado sea exactamente igual a 5, será indiferente aumentar o no una unidad al último número restante. Entonces la expresión 525,35 puede escribirse como 525,3 o 525,4.

Veamos como efectuaríamos la suma anterior:

2807,5	permanece invariable	2807,5
0,0648	queda como	0,1
83,645	se reduce a	83,6
525,35	se escribe como	525,3
El resultado correcto es		**3416,5**

Para la sustracción se seguirá el mismo procedimiento.

2) <u>Multiplicación y División.</u>

En este caso es conveniente observar la siguiente regla: verificar cual es la cantidad que tiene el menor número de cifras significativas, y en el resultado, se conservará solamente un número de cifras igual a la de dicha cantidad.

Supongamos que <u>queremos multiplicar 3,67 por 2,3.</u>

Teniendo en cuenta la regla anterior, la cantidad de menor número de cifras significativas es 2,3, por lo tanto en el resultado deberán mantenerse dos cifras significativas, por lo tanto lo escribiremos de la siguiente manera:

$$3{,}67 \times 2{,}3 = 8{,}4$$

En la aplicación de esta regla, al eliminar los números del producto debemos seguir el mismo criterio de redondeo de cantidades que explicamos al estudiar la adición.

Cuando se efectúa una división debe seguirse un proceso similar.

Introducción a la Teoría de Errores de Gauss.

Conceptos Iniciales.

Según su origen, los errores se clasifican en **sistemáticos** y **accidentales o casuales.**

Los sistemáticos se deben a instrumentos defectuosos o a la utilización de métodos inadecuados. Son propios de cada experiencia y por lo tanto no admiten un tratamiento general.

Un ejemplo de este tipo de errores se da cuando se miden longitudes con una cinta milimetrada que tiene una división correspondiente a un milímetro diferente de las otras.

Estos errores tienen siempre del mismo signo y valor, y su eliminación requiere un cuidadoso análisis de los instrumentos y de los métodos de medición.

Los accidentales se deben a causas fortuitas. Varían al azar y pueden producirse con distinto valor absoluto o signo. Por ejemplo, ocurren cuando se utiliza una balanza sensible a las corrientes de aire y se hacen mediciones de masas en ambientes no acondicionados.

Experimentalmente se confirma que tienen una **distribución gaussiana** por lo que admiten un tratamiento estadístico. **A ellos se aplica la Teoría de Errores de Gauss.**

Procedimiento.

Usualmente, en el laboratorio, una magnitud m se mide un número n de veces, ya que si se hace una sola lectura no se tiene idea alguna sobre los errores accidentales y en este caso, el error de la medida se toma igual al error mínimo. Para tener información de estos errores es conveniente, siempre que se pueda, repetir la lectura un número n de veces. En esta situación se encuentra que la medida de la cantidad m fluctúa. O sea que las diferentes lecturas m_1, m_2, …,m_n no necesariamente coinciden entre ellas, salvo algunas entre sí. Esta diversidad es propia del proceso de medición y no se debe a la inexperiencia del operador.

La cuestión fundamental de la Teoría de Errores es encontrar una función, llamada **función de distribución de probabilidad de errores** que, a partir de las mediciones realizadas, permita obtener la **probabilidad de conseguir un determinado error.**

Teniendo una serie de lecturas caben los interrogantes:

¿Cuál es el mejor valor de la magnitud medida?
¿Cómo se evalúa la calidad del conjunto de medidas realizadas?
¿Cómo se define el intervalo de esta lectura?

En necesario recordar algunas definiciones:

Probabilidad P de que un determinado evento ocurra = Número de casos favorables / Número de casos posibles.

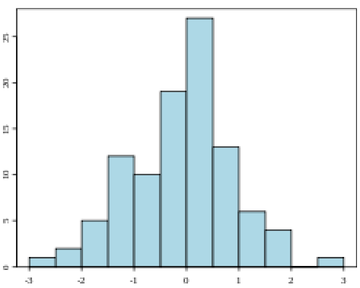
El mejor valor de una serie es el **promedio** $\overline{m} = \frac{\sum m_i}{n}$ (por definición)

El error de cada lectura, o **desviación** es: $x_i = \overline{m} - m_i$

Antes de responder a los interrogantes se hará referencia brevemente a la cuestión de cómo se distribuyen las desviaciones alrededor del error cero ($m_i = m$). Se parte del supuesto (confirmado experimentalmente) que para una serie de mediciones la suma de las desviaciones es igual a cero (por tener una distribución Gaussiana). O sea que $\sum x_i = 0$.

Se construyen gráficas de frecuencia (número de veces que aparece un valor m_i en la serie de lecturas) en función de m_i. Estas gráficas llamadas histogramas brindan información sobre la distribución de las lecturas y aunque son discontinuas dan una idea de regularidad. Para obtener mayor información se aumenta el número de lecturas con lo que el histograma va tomando una forma definida. En el límite cuando $n \rightarrow \infty$ la frecuencia se confunde con la probabilidad.

Para ver con más detalles la construcción de histogramas y la deducción de la función error ver "Errores Experimentales, Cudmani – UNT".



Volviendo a las cuestiones inicialmente planteadas y recordando la hipótesis de que la suma de las desviaciones es igual a cero, para llegar a una medida de la calidad de las series de mediciones se considera la suma de los cuadrados de las desviaciones. Pero si el número n de lecturas es elevado, la sumatoria también puede resultar grande por lo que esta se divide entre n, y para que tenga la misma unidad que la magnitud medida se le extrae la raíz cuadrada. Esto se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

Esta cantidad se denomina **error medio cuadrático de cada medición**, o **error estándar**, o **error típico**, o **varianza**. Representa la desviación de cada serie de mediciones respecto a un valor promedio.

Para estimar el intervalo en torno del mejor valor m en que estaría comprendido el verdadero valor, con una cierta probabilidad, se debe encontrar primero una definición operacional de lo que es el verdadero valor. Para esto se hacen varias series de mediciones (N) de la magnitud m y se calcula para cada serie su promedio y su error estándar. El verdadero valor se considera como el promedio de los mejores valores. Esto es:

$$\overline{m} = \frac{\sum m}{N}$$

El error de este verdadero valor sí debe disminuir con el número de lecturas.

El **error cuadrático medio del promedio *E*** es el error respecto del verdadero valor. Se puede llegar a una expresión que permita acotar con *E* el valor promedio sin conocer el valor verdadero. Esto es:

$$m = \overline{m} \pm E$$

donde $E = \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2}{n(n-1)}}$. (Para su demostración ver "Errores Experimentales – Cudmani – UNT)

Esta expresión puede entenderse diciendo que si se hace un número *n* de mediciones de una magnitud *m* y se calcula *m* y *E*, se puede decir que el verdadero valor *m* está comprendido en el intervalo:

$$\overline{m} - E < \overline{m} < \overline{m} + E \qquad \text{ó} \qquad \overline{m} = \overline{m} \pm E$$

La acotación de una cantidad Δm saldrá de la comparación entre *E* y los errores mínimos. De aquí resulta que por más que se aumente el número de lecturas no se puede disminuir Δm por debajo del orden de los errores mínimos. En consecuencia realizar más lecturas en estas condiciones solo implicaría una pérdida de tiempo.

Entonces el valor de una cantidad medida un número *n* de veces se expresa poniendo como resultado de la magnitud el valor promedio de la cantidad, acotado con la suma que resulta de los errores mínimos y el error cuadrático medio del promedio.

Ejemplo numérico 1

Se mide 10 veces la longitud de una varilla con un calibre de Ap = 0,05 mm, los resultados se muestran en la tabla siguiente:

N° de medición	l_i [mm] longitud	x_i [mm] desviación	X_i^2 [mm^2]
1	12,65	-0,09	0,0081
2	12,60	-0,04	0,0016
3	12,55	0,01	0,0001
4	12,55	0,01	0,0001
5	12,60	-0,04	0,0016
6	12,45	0,11	0,0121
7	12,50	0,06	0,0036
8	12,50	0,06	0,0036
9	12,65	-0,09	0,0081
10	12,55	0,01	0,0001

$\Sigma\, l_i$ = 125,60 mm

$$\bar{l} = \frac{\Sigma l_i}{n} \qquad \sum x^2 = \sum\left(\bar{l} - l_i\right)^2 = 0{,}0390\text{mm}^2 \rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}} = 0{,}0624\text{mm}^2$$

σ = 0,06 mm $\rightarrow$ $E = \sqrt{\dfrac{\sigma}{(n-1)}} = 0{,}02\text{mm}^2$ $E = \sqrt{\dfrac{\sum x^2}{n(n-1)}}$

Como la Ap = 0,05 mm ∆l = (0,02 + 0,05) mm = 0,07 mm
El resultado acotado es: *l* = (12,56 ± 0,07) mm

La acotación ∆l se hace con la suma de los errores mínimos, en este caso solo el e_{ap} más el error cuadrático medio del promedio.

Ejemplo numérico 2.

Se mide 10 veces el diámetro de una bolilla utilizando un micrómetro con una apreciación de 1 centésima de mm (Ap = 0,001 mm)

n	d_i [mm]	x_i [mm]	x_i^2 [mm^2]
1	1,58	0,00	0,0000
2	1,57	0,01	0,0001
3	1,59	-0,01	0,0001
4	1,58	0,00	0,0000
5	1,57	0,01	0,0001
6	1,57	0,01	0,0001
7	1,59	-0,01	0,0001
8	1,58	0,00	0,0000
9	1,57	0,01	0,0001
10	1,59	-0,01	0,0001

$\sum d_i = 15{,}79\,\text{mm} \rightarrow d = \dfrac{\sum d}{n} = 1{,}58\,\text{mm}$; $\sum x_i^2 = \sum \left(d - d_{ii}\right)^2 = 0{,}0007\,\text{mm}^2$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} = 0{,}0084\,\text{mm} \cong 0{,}008\,\text{mm}$$

$$E = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n\left(n-1\right)}} = 0{,}0028\,\text{mm} \cong 0{,}003\,\text{mm}$$

Teniendo en cuenta que, en este caso la apreciación es 0,01 mm, el resultado se expresa:

d = (1,58 ± 0,01) mm

El error con que se acota el resultado final es igual a la suma del error mínimo más el error cuadrático medio del promedio. En este caso, en particular, queda acotado con el error mínimo (para el ejemplo solamente el error de apreciación) ya que este es de mayor orden que el error cuadrático medio del promedio.

Ejercicios.

1.- Clasifique en sistemáticos o accidentales las siguientes fuentes de error, justificando su respuesta:

a) Se miden longitudes con una regla metálica en un ambiente de temperatura elevada.

b) Se miden magnitudes eléctricas (tensión y corriente), en momentos en que hay fluctuaciones en la tensión de línea.

c) En una experiencia se mide la temperatura del agua en ebullición donde se encuentra sumergido un sólido. Luego se extrae el sólido y se lo traslada hasta un recipiente con agua fría. Para cálculos posteriores se considera que el sólido se introduce a la temperatura que tenía en el agua en ebullición.

d) Se mide el tiempo de vuelo de un proyectil de material sintético en un ambiente en donde circulan corrientes de aire.

2.- Se hace una serie de mediciones del tiempo que tarda un volante en detenerse a partir de una cierta velocidad angular.

n	*t* [s]
1	13,25
2	13,71
3	13,60
4	13,21
5	13,10
6	13,25
7	13,98
8	13,57
9	13,10
10	13,80

a. Calcule el mejor valor del tiempo.
b. ¿Cuál es la cota final de error y cómo la estima?

¿COMO SE PROPAGAN LOS ERRORES? – MEDICIONES INDIRECTAS.

Método Simplificado.

No siempre es posible medir una cantidad física en forma directa. Sin embargo, si se conoce alguna expresión que relacione la cantidad problema con otras cantidades, que sí pueden medirse, la determinación puede efectuarse en forma indirecta.
Por ejemplo, si se desea medir la aceleración de la gravedad en un lugar y se conoce la expresión para el período de un péndulo, tal como:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

El período y la longitud del péndulo son fácilmente medibles, con cronómetro y regla, por lo que "*g*" puede ser calculada a partir de:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

En este caso el nuevo problema consiste en ¿cómo acotar, o dar el valor del intervalo de incerteza en el caso de mediciones indirectas?
En lo que sigue veremos algunas situaciones típicas:

Cantidad Suma de otras.

Cuando la cantidad problema es la suma de cantidades que se miden directamente se considera siempre el caso más desfavorable, esto es, que el intervalo de incerteza es la suma de las incertezas experimentales de las cantidades que se suman.

Sea A una cantidad que se quiere medir indirectamente, B y C las que se miden directamente y sea $A = B + C$ la función que las relaciona. ΔB y ΔC son los errores correspondientes a las mediciones de B y de C, respectivamente. Para conocer el error cometido en la determinación de A, que es ΔA, se procede de la siguiente manera:

$$B = \overline{B} \pm \Delta B$$

$$C = \overline{C} \pm \Delta C$$

En donde $\overline{B}$ y $\overline{C}$ representan los valores más probables o mejores valores para B y C, lo que significa que:

$$\overline{B} - \Delta B < B < \overline{B} + \Delta B$$

y

$$\overline{C} - \Delta C < C < \overline{C} + \Delta C.$$

Sumando estas desigualdades se tiene:

$$\left(\overline{B} + \overline{C}\right) - \left(\Delta B + \Delta C\right) < B + C < \left(\overline{B} + \overline{C}\right) + \left(\Delta B + \Delta C\right)$$

O sea que:

$$\overline{A} - \left(\Delta B + \Delta C\right) < A < \overline{A} + \left(\Delta B + \Delta C\right)$$

Lo que puede escribirse:

$$\overline{A} - \Delta A < A < \overline{A} + \Delta A$$

Lo que significa que:

$$\Delta A = \Delta B + \Delta C\,.$$

Lo cual se enuncia de la siguiente manera: “**El error absoluto de una cantidad que es suma de otras es igual a la suma de los errores absolutos de cada una de ellas**”.

Si $A = B + C + D + \ldots + X$, entonces $\Delta A = \Delta B + \Delta C + \Delta D + \ldots + \Delta X$

Ejemplo: Se desea medir *A*, la longitud total ocupada por dos piezas metálicas *B* y *C*, y para ello se utiliza un calibre de 0,1 mm de apreciación.
Supongamos que la longitud de cada pieza se mide solo una vez y se obtiene:

$$B = (16{,}4 \pm 0{,}1)\ \text{mm}$$
$$C = (9{,}9 \pm 0{,}1)\ \text{mm}$$

Sumando $A = B + C = 16{,}4$ mm + $9{,}9$ mm $\pm$ ($0{,}1$ mm + $0{,}1$ mm) = ($26{,}3 \pm 0{,}2$) mm

Entonces el error absoluto de *A* es ΔA = 0,2 mm

Cantidad diferencia de otras.

En el caso que *A* se calcule como diferencia entre *B* y *C* podemos escribir:

$$A = B + (-C)$$

“**El error absoluto de una cantidad que es diferencia de otras, es igual a la suma de los errores absolutos de éstas**”.

Ejemplo: Se quiere conocer la masa de agua que contiene un recipiente. Para ello se mide primero la masa del recipiente con agua resultando $m_T = (436{,}18 \pm 0{,}01)$ g. Luego se mide la masa del recipiente vacío $m_v = (128{,}12 \pm 0{,}01)$ g
La masa de agua es:

$$m_{ag} = m_T - m_v = (436{,}18 - 128{,}12) = 308{,}06\ \text{g}$$

Y la incerteza:

$$\Delta m_{ag} = \Delta m_T + \Delta m_V = (0{,}01 + 0{,}01)\ \text{g}$$

El resultado se expresa entonces de la siguiente manera:

$$m_{ag} = (308{,}06 \pm 0{,}02)\ \text{g}$$

Hay que tener en cuenta que, ya sea que se trate de una suma o una resta, los errores absolutos siempre se suman.

Caso particular de la suma: Cantidad múltiplo de otras.

Si calculamos una cantidad *X* como múltiplo de otra, en la forma $Y = k\,X$, en donde k es un número conocido.
Esta expresión puede escribirse así:

$$Y = X + X + \ldots \quad (\text{ k veces})$$

De acuerdo con la regla recién presentada: ΔY = k ΔX.

Por lo tanto:

$$Y = k\,X \pm k\,\Delta X.$$

<u>Ejemplo:</u> Se determina el período *T* de un péndulo midiendo el tiempo *t* empleado en diez oscilaciones completas mediante un cronómetro de apreciación 0,01 s.

La relación $T = \frac{t}{10}$ permitirá calcular el valor de *T* y su error.

El valor medido para *t* es:

$$t = 15{,}24 \text{ s}$$

El valor calculado para *T* es:

$$T = 1{,}524 \text{ s.}$$

¿Es posible asignar para *T* cuatro cifras significativas, si el cronómetro solo aprecia 0,01 s?

De la expresión $T = \frac{t}{n}$, aplicando la regla $\Delta T = \frac{1}{n}\Delta t$, resulta:

$$\Delta T = 0{,}1 \;.\; 0{,}01 = 0{,}001 \text{ s.}$$

Entonces el valor acotado de *T* será:

$$T = (1{,}524 \pm 0{,}001)\text{s}$$

<u>Cantidad Producto de otras.</u>

Si la cantidad problema *A* se determina indirectamente como producto de otras dos *B* y *C* que se miden. Es posible encontrar una relación para el error absoluto y el error relativo de *A* en función de los errores absolutos y relativos de las cantidades medidas.

Esto es, si:

$$A = \overline{B}\,.\overline{C} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{l} \overline{B} - \Delta B < \overline{B} < \overline{B} + \Delta B \\ \overline{C} - \Delta C < \overline{C} < \overline{C} + \Delta C \end{array}$$

Multiplicando:

$$\overline{B}C - \overline{B}\,\Delta C - \overline{C}\,\Delta B + \Delta B\,\Delta C < \overline{B}\,\overline{C} < \overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\Delta C + \overline{C}\Delta B + \Delta B\,\Delta C$$

Suponiendo que, como generalmente sucede, ΔB y ΔC son relativamente pequeños frente a *B* y *C*, el sumando $\Delta B\,\Delta C$ es despreciable comparado con los otros dos. Por lo tanto, la expresión queda:

$$\overline{B}C - \left(\overline{B}\,\Delta C + \overline{C}\,\Delta B\right) < \overline{B}\,\overline{C} < \overline{B}\,\overline{C} + \left(\overline{B}\,\Delta C + \overline{C}\Delta B\right)$$

O sea:

$$A - \left(\overline{B}\,\Delta C + \overline{C}\,\Delta B\right) < A < A + \left(\overline{B}\,\Delta C + \overline{C}\Delta B\right)$$

De donde se obtiene, para el error absoluto de un producto:

$$\Delta A = \left(\overline{B}\ \Delta C + \overline{C}\Delta B\right)$$

Es posible una expresión más fácil de recordar para el error relativo de un producto, dividiendo esta expresión entre *A*:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{C}$$

"El error relativo de una cantidad producto de otras es igual a la suma de los errores relativos de éstas".

Ejemplo: Si se quiere medir la sección *S* de una barra rectangular de lados *A* y *B*, con un calibre de apreciación igual a 0,1 mm.

Supongamos que se obtengan las siguientes mediciones:

$A = (32{,}6 \pm 0{,}1)$ mm

$B = (12{,}4 \pm 0{,}1)$ mm

Entonces:

$S = A\ .\ B = 404{,}24\ \text{mm}^2$

Nuevamente se desea saber si el número de cifras es el correcto. Aplicando la regla para el error absoluto del producto, se obtiene:

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} = \frac{0{,}1\text{mm}}{32{,}6\,\text{mm}} + \frac{0{,}1\text{mm}}{12{,}4\,\text{mm}} = 0{,}003 + 0{,}008 = 0{,}011 \cong 0{,}01$$

De donde:

$$\Delta S = \frac{\Delta S}{S}.S = 0{,}01.\,404{,}24\,\text{mm}^2 = 4{,}042\,\text{mm}^2 \cong 4\,\text{mm}^2$$

Se debe tener en cuenta que el error se debe consigna con solo una cifra significativa.

Así, el mejor valor de *S* se comunica de la forma:

$S = (404 \pm 4)\ \text{mm}^2$

Observar que el error absoluto (4 mm^2) nos indica cual es la primera cifra incierta del resultado (el 4 correspondiente a las unidades de 404 mm^2). Por ello, no se deben consignar más cifras que ésta, ya que carecen de significado (en este caso, carecen de significado el 2 de las décimas y el 4 de las centésimas del resultado 404,24 mm^2).

<u>Caso particular: Cantidad Potencia enésima de otra.</u>

Consideramos el caso en que:

$$A = B^n = B \,.\, B \,.\, B \,.\, \dots\, B$$

Se procede del mismo modo que para el producto.

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta B}{B} + \dots + \frac{\Delta B}{B} = n\,\frac{\Delta B}{B}$$

Por lo tanto: "**El error relativo de una cantidad que se calcula como la potencia enésima de otra que se mide es igual a *n* veces el error relativo de la cantidad medida**"

Entonces si:

$$\frac{\Delta A}{A} = n\,\frac{\Delta B}{B} \quad\rightarrow\quad \Delta A = \frac{\Delta A}{A}\,.\,A = n\,A\,\frac{\Delta B}{B}$$

Ejemplo: Calcular el volumen *V* de un cubo y su error ΔV cuando se mide la arista *a* con un micrómetro de apreciación 0,01 mm. Una primera medición arroja el valor para *a* de 42,56 mm.

$$a = (42{,}56 \pm 0{,}01)\text{ mm.}$$

Como $V = a^3$, resulta $\frac{\Delta V}{V} = 3\,\frac{\Delta a}{a}$.

Utilizando una calculadora obtenemos para *V* el valor donde se supone que al menos se pueden asegurar cuatro cifras significativas.

$$V = 77091{,}21\text{ mm}^3 = 77{,}09\text{ cm}^3$$

El error absoluto se calcula de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\,\frac{\Delta a}{a} = 3\,\frac{0{,}01\text{mm}^3}{42{,}56\,\text{mm}^3} \cong 0{,}0007 = 7\,.\,10^{-4}$$

$$\Delta V = 7\,.\,10^{-4}\,.\,77{,}09\text{ cm}^3 = 0{,}05\text{ cm}^3$$

El resultado se expresa entonces de la siguiente manera:

$$V = (77{,}09 \pm 0{,}05)\text{ cm}^3$$

El error relativo porcentual para este resultado se calcula de la siguiente manera.

$$\varepsilon\,\% = \frac{\Delta V}{V}.100 = 7\,.\,10^{-4}\,.100 = 0{,}07\%$$

Este caso puede aplicarse tanto a potencias enteras como fraccionarias, positivas o negativas.

Como siempre en la propagación de errores, se considera que los errores, en las distintas mediciones de las magnitudes que se miden, se suman. El error relativo de la magnitud que se calcula es la suma de los errores de las magnitudes medidas, independientemente del signo de la potencia.

Por ejemplo, se desea determinar la aceleración de la gravedad (g) con un péndulo ideal de longitud $l = l \pm \Delta l$. Se procede a medir el tiempo t de 10 oscilaciones con un cronómetro de 0,2 seg. La relación que liga el período del péndulo (tiempo de una oscilación) con la longitud del péndulo es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

El período está relacionado con el tiempo medido según:

$$T = \frac{t}{n}$$

¿Cómo determinar entonces el error relativo de g?
Lo primero es escribir a g como una función de las cantidades que se miden.

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

Entonces, aplicando las reglas de propagación se tiene:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta 4}{4} + 2\frac{\Delta \pi}{\pi}$$

Y de allí

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T}$$

Observar que T puede ponerse como T^{-1} donde el exponente es (-1) sin embargo, según la regla, el error relativo se suma.
En el caso del número 4, este no representa una cantidad medida, sino un número entero que resulta de la ecuación. Por lo tanto $\Delta 4 = 0$.
En el caso del número π, tampoco se trata de una cantidad medida, pero es una cantidad conocida con infinitas cifras decimales. Para el cálculo del error relativo de g, puede tomarse al número π con tantas cifras decimales como sea necesario para hacer que su error relativo sea despreciable frente a los errores relativos de los otros términos. Es suficiente con que sea un orden de magnitud menor que el más pequeño de los otros errores relativos.
En definitiva, en error en la determinación de g depende del error con que se midan la longitud y el tiempo. Recordar que $\Delta T = \frac{\Delta t}{n}$.

Cantidad cociente de otras dos.

Si tenemos una cantidad A que se mide indirectamente, a través de B y C, medidas directamente de modo que:

$$A = \frac{B}{C}$$

Para determinar ΔA debemos tener en cuenta que: "**El error relativo de un cociente es igual a la suma de los errores relativos de las lecturas directas del dividendo y del divisor**".

Es decir:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{C}$$

De donde:

$$\Delta A = \left(\frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{C} \right) . A$$

Ejemplo: Se quiere determinar la densidad media ρ de un sólido sabiendo que la relación entre su masa y su volumen es:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

De la medición de la masa y el volumen se obtiene:

m = (0,16 $\pm$ 0,01) g y V = (0,020 $\pm$ 0,001) cm^3

Por lo tanto:

$$\rho = \frac{0{,}16\,\mathrm{g}}{0{,}020\,\mathrm{cm}^3} = 8{,}0\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

¿Es posible consignar un cero más para ρ?

El cálculo del error relativo nos da:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V} = \frac{0{,}01\,\mathrm{g}}{0{,}16\,\mathrm{g}} + \frac{0{,}001\,\mathrm{cm}^3}{0{,}020\,\mathrm{cm}^3} = 0{,}1125 \cong 0{,}1$$

El cálculo del error absoluto queda:

$$\Delta \rho = \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V} \right) . \rho = 0{,}1 . 8{,}0\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 0{,}8\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

El resultado se expresa de la siguiente manera:

$$\rho = (8{,}0 \pm 0{,}8)\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

Evidentemente, siendo el error absoluto de 8 décimas, no se puede decir nada respecto de las centésimas de g/cm^3.

EJERCICIOS

Calcule y acote las siguientes magnitudes obtenidas indirectamente.

1. El volumen de una barra rectangular cuyas medidas son:
   l = (312,5 ± 0,5) mm
   a = (3,05 ± 0,05) mm
   b = (3,00 ± 0,05) mm

2. La aceleración de un cuerpo que se mueve en línea recta y que parte del reposo. Las magnitudes medidas son:
   x = (212,5 ± 0,5) mm
   t = (2,132 ± 0,001) s

3. La altura máxima alcanzada por un proyectil, habiendo medido su velocidad inicial y la aceleración de la gravedad.
   V_{oy} = (16,4 ± 0,2) m/s
   g = (9,79 ± 0,01) m/s^2

4. La energía cinética de un cuerpo que se traslada en línea recta habiéndose medido su masa y su velocidad.
   m = (41,02 ± 0,01) g
   v = (11,8 ± 0,2) m/s

5. La velocidad de un proyectil utilizando un péndulo balístico a partir de las siguientes mediciones:
   Masa del bloque de madera: M_b = (1500,2 ± 0,1) g
   Masa del proyectil: m_p = (10,05 ± 0,01) g
   Altura que alcanza el bloque al ser impactado: H = (35,6 ± 0,2) cm
   Aceleración de la gravedad: *g* = (9,81 ± 0,01) m/s^2

6. El momento de inercia de un disco uniforme que gira en torno a un eje perpendicular al plano del disco situado a una distancia R/2, aplicando el Teorema de Steiner.
   Masa del disco: M = (436,12 ± 0,01) g
   Diámetro del disco: D = (26,10 ± 0,05) mm

REPRESENTACIONES GRAFICAS

En las prácticas experimentales suele ocurrir que en el desarrollo de las mismas sea necesario no solo medir una magnitud *m* que puede estar cambiando su valor, sino también otra magnitud *p* que depende de la primera. Así es que cuando varía *m* también varía *p* por lo que se puede decir que ***p* = f (*m*).**

Si varía *m* y se obtienen *n* valores de la misma, también se obtendrán *n* valores de *p*. Luego, con este conjunto de pares de valores (*m,p*) se puede construir un gráfico que proporciona una visualización de cómo se relacionan estas magnitudes. Se tendrá una representación gráfica de la relación mediante la curva que más se adapte a los datos experimentales. Esto permite determinar valores de *p* para cualquier valor de *m* medido.

La representación gráfica puede utilizarse en dos situaciones:

a) Cuando en una práctica se tiene un supuesto, un modelo teórico que permite prever la forma de la función y se quiere verificar este supuesto. Ejemplos de esta situación son cuando se controla que un resorte cumpla con la ley de Hooke, o cuando se supone que un móvil se mueve con velocidad constante.
b) Puede ocurrir que no se conozca la forma de la relación. Entonces la representación gráfica permitirá deducir una aproximación a la forma de la función que relaciona *p* con *m*. Esto se presenta en trabajos de investigación.

Criterios para la selección de Escalas.

La escala adoptada para graficar no es arbitraria sino que se debe elegir teniendo en cuenta el tamaño del papel sobre el cual se hará la representación gráfica y los errores cometidos al medir las magnitudes.
En principio la gráfica debe ocupar toda la hoja de papel disponible. En segundo lugar, de ser posible, debería poder representarse Δm y Δp. Por lo general se recomienda adoptar la menor longitud perceptible en el papel (0,5 mm o 1 mm) para representar el orden del error (el orden de la última cifra significativa).

Ejemplo: Si una temperatura medida resulta T = (12,5 $\pm$ 0,5) °C en la representación gráfica con la escala 0,5 °C = 1 mm resulta que la representación de la temperatura medida tendrá 25 mm.

Entonces al adoptar una escala queda también definido el tamaño del gráfico. Para el ejemplo dado anteriormente, si esta fuera de mayor apreciación resultaría mayor el tamaño del gráfico con la misma escala.

T = (12,1 $\pm$ 0,1) °C

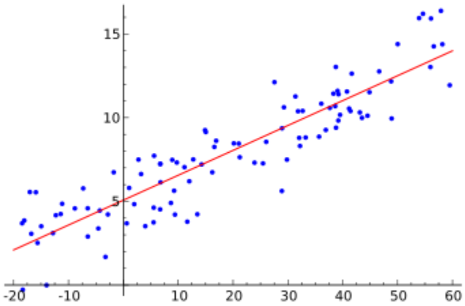
Si 0,1 °C = 1 mm $\rightarrow$ 12,1 °C = 121 mm.

Con este criterio de representación deben aparecer en la gráfica el intervalo de incerteza asociado a cada punto, el que está definido por los valores $m \pm \Delta m$ y $p \pm \Delta p$.

Otro criterio a tener en cuenta es que el factor de la escala debe ser cómodo: 1, 2, 5, 10 y sus múltiplos y submúltiplos.

Planificación de la Experiencia.

Se sigue la convención de representar en absisas la variable independiente y la dependiente en las ordenadas. Ocurre que la variable *m* puede ser controlada por el experimentador generalmente con más precisión que la variable dependiente *p*.
Antes de hacer las mediciones se debe determinar el rango de variación posible de la variable independiente y se debe determinar cuántos puntos se tomarán y con qué distribución dentro del rango elegido de antemano. Generalmente conviene que estos puntos estén uniformemente distribuidos a no ser que haya puntos singulares, alrededor de los cuales se deben tomar más medidas. Además de la tabla de valores, se deben asentar sus intervalos de incerteza, que pueden variar punto a punto, ya sea por que se midió en diferente escala, o porque provienen de un conjunto diferente de mediciones.



Al unir los puntos con una línea continua se supone que la relación que liga las magnitudes medidas es una función continua. Esto puede justificarse por observación del proceso de medición o por justificaciones teóricas.

Caso de relación lineal.

Después de representarse los pares de valores correspondientes, se traza la mejor recta, compensando los errores en uno y otro sentido. La pendiente de la recta se calcula usando los puntos (m_1 ; p_i) y (m_n ; p_n) resultando luego una premediación gráfica.

$$K = (K_{max} + K_{min})/2$$

Y su error se calcula:

$$\Delta K = (K_{max} - K_{min})/2$$

Significa que en el gráfico deben trazarse dos rectas, una de pendiente máxima (K_{max}) y otra de pendiente mínima (K_{min}).
Puede ocurrir que no siempre la función que liga a *m* con *p* sea lineal y que se necesiten encontrar las constantes. En estos casos conviene hacer un cambio de variables que permita trazar una recta y encontrar los valores deseados.

Ejemplos:

1) Se mide el tiempo que tarda un líquido en salir por un orificio de un recipiente con un cronómetro de apreciación 0,2 s. El volumen recogido correspondiente a los distintos tiempos se mide con un error de 0,5 mililitros. Se obtienen los siguientes pares de valores:

   t [s] : 0,0 – 5,0 – 10,0 – 15,0 – 17,0
   v [ml]: 0,0 – 15,0 – 30,5 – 45,5 – 51,0

   a) Trace la gráfica correspondiente.
   b) Calcule la pendiente y acote su valor.

2) La tabla de este problema muestra las distancias recorridas por un automóvil las que fueron medidas con un error de 0,1 km y el consumo de combustible correspondiente a cada recorrido, con un error de 0,1 litros.
    a) Empleando los valores tabulados, trace el gráfico distancia – combustible.
    b) ¿Qué tipo de relación existe entre distancia y combustible?
    c) Calcule la pendiente de la gráfica. Interprete el significado de la misma.

Distancia recorrida d [km] : 20 – 40 -60 -80
Consumo de combustible [l]: 2,5 – 5,0 – 7,5 – 10,0

Bibliografía:

- Trabajos Experimentales de Física – Fernández y Galloni – Edit. Nigar.
- Introducción a las Mediciones de Laboratorio – Maiztegui – Gleizer – Edit. Kapeluz.
- Cálculo de Errores Experimentales – Cudmani – UNT.
